Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - BTS, groupement B

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine : équation différentielle et étude de la vitesse (12 questions) **Page 3**

2. Système électrique entrée-sortie et transformées de Laplace (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btscav.fr/assets/annales/bts-cav/E2 - Mathématiques/2022/BTS CAV - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine : équation différentielle et étude de la vitesse

Un chariot lancé à 20 m/s est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction du temps. Les questions portent sur la résolution d'une équation différentielle, l'étude de la fonction vitesse, la distance parcourue et le développement limité au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

Pour une équation homogène de la forme $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$, avec $k \in \mathbb{R}$. Ici, $a = 0,8$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction constante g définie par g(t) = 5 est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ vérifie $g'(t) = 0$. En la substituant dans le membre de gauche, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$, égal au membre de droite.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $g(t) = 5$ est solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1.c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Une solution particulière est $g(t) = 5$. Toute solution de l'équation complète s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène $y' + 0,8y = 0$, soit $ke^{-0,8t}$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale s'écrit $f(t) = ke^{-0,8t} + 5$. Avec $f(0) = 20$ et $e^0 = 1$, la condition initiale donne $k + 5 = 20$, donc $k = 15$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. À partir de l'expression f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est 5.

Lorsque $t \to +\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Ainsi, dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend vers zéro et le terme constant reste égal à 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative C admet une asymptote, et en donner une équation.

La courbe d'une fonction qui tend vers une limite finie en $+\infty$ admet une asymptote horizontale d'équation égale à cette limite. Ici, la limite vaut 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. En utilisant f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Comme $e^{-0,8t} > 0$, on a $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ sur l'intervalle. La fonction décroît strictement de $f(0) = 20$ vers sa limite 5.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour tout $t \geq 0$, le terme $15e^{-0,8t}$ est positif, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse ne s'annule jamais et tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, le chariot ne s'arrête pas : sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Question 4.a. **Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant avec la règle de la chaîne, $F'(t) = -18,75 \times (-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Or cette dernière expression est $f(t)$, donc F est bien une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4.b. **Calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre t = 0 et t = 1, à l'aide de l'intégrale de f, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

Par le théorème fondamental, $d = F(1) - F(0)$. Ainsi, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres, soit environ $15,3251$ mètres.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m}$, soit $15,33\ \mathrm{m}$ au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Parmi les propositions, recopier l'unique développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro qui convient. Aucune justification n'est demandée ; une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni ne retire de point.**

Le polynôme de Taylor affiché est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. À l'ordre 2, le reste doit être de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$. C'est donc la troisième proposition.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

Le point de tangence est $(0; f(0)) = (0; 20)$. Le coefficient directeur vaut $f'(0) = -12e^{-0{,}8\times 0} = -12$. L'équation de la tangente est donc $y = f'(0)t + f(0)$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = -12t + 20$.

2. Système électrique entrée-sortie et transformées de Laplace

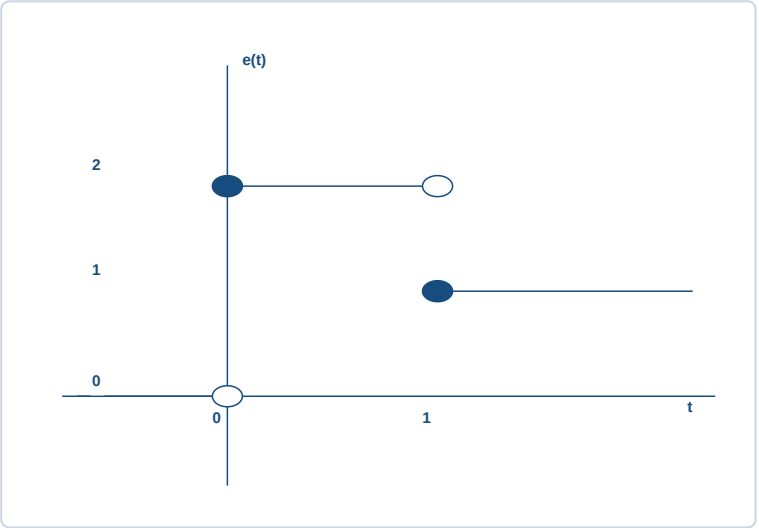
Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et possède pour fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). L'étude porte sur la représentation du signal d'entrée, le calcul du signal de sortie par transformées de Laplace et la représentation graphique du signal obtenu.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t) = 2U(t) - U(t - 1).

La fonction échelon vaut 0 avant 0 et 1 à partir de 0. Ainsi, pour $t < 0$, le signal est nul ; pour $0 \leq t < 1$, il vaut 2 ; pour $t \geq 1$, il vaut $2 - 1 = 1$. En particulier, les valeurs aux changements de palier sont $e(0) = 2$ et $e(1) = 1$: les points correspondants sont pleins.

Signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

Palier 0 avant 0, palier 2 sur [0 ; 1[, puis palier 1 à partir de 1, avec les valeurs aux bornes incluses.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t).

La transformée de Laplace est linéaire et le formulaire donne les transformées de $U(t)$ et de $U(t - a)$. Ici, le retard est $a = 1$, donc la transformée du second échelon comprend le facteur exponentiel e^{-p}. On applique ensuite les coefficients 2 et −1 de l'expression du signal d'entrée.

On obtient : $E(p) = 2 \times \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/[p(p + 1)]]e^(-p).

Par définition de la fonction de transfert, $S(p) = H(p)E(p)$. On utilise $H(p) = \frac{1}{p+1}$ et le résultat de la partie A, $E(p) = \frac{2-e^{-p}}{p}$. Le dénominateur commun est alors $p(p+1)$. En distribuant le facteur $1/(p+1)$ sur les deux termes du numérateur, on obtient l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier l'égalité 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{p+1}{p(p+1)} - \frac{p}{p(p+1)} = \frac{(p+1)-p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

Les deux fractions de gauche ont été mises au même dénominateur. Leur différence au numérateur vaut exactement 1. L'identité est donc vérifiée pour les valeurs de p où les fractions sont définies, c'est-à-dire lorsque $p \neq 0$ et $p \neq -1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$, pour $p \neq 0, -1$.

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e^(-p)/p et de e^(-p)/(p + 1).

Les deux premières transformées inverses se lisent directement dans le formulaire : l'échelon unité correspond à $1/p$, et l'exponentielle causale $e^{-t}U(t)$ correspond à $1/(p+1)$. Pour les deux autres expressions, le facteur e^{-p} traduit un retard d'une unité. On remplace donc *t* par *t* − 1 et on multiplie chaque fonction retardée par $U(t-1)$.

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Dans l'ordre demandé : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. **En déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

En utilisant la décomposition de la question précédente dans l'expression de $S(p)$, on obtient deux termes non retardés et deux termes retardés. Sur l'intervalle $[0;1[$, le facteur $U(t-1)$ est nul : les termes retardés ne contribuent donc pas. Les deux premiers termes ont pour transformée inverse $2U(t) - 2e^{-t}U(t)$. Sur cet intervalle, $U(t) = 1$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 pour t appartenant à [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis sous forme approchée au dixième.**

La formule donnée pour $t \geq 1$ s'applique à la borne $t = 1$. En remplaçant *t* par 1, puis en utilisant $e^{-1} = 1/e$, on simplifie l'expression exacte. Enfin, avec $e \approx 2,718$, on obtient une valeur approchée qui s'arrondit au dixième. Cette valeur est cohérente avec le raccordement des deux expressions de $s(t)$ en 1.

$$s(1) = (e-2)e^{-1} + 1 = 2 - \tfrac{2}{e} \approx 1,264.$$

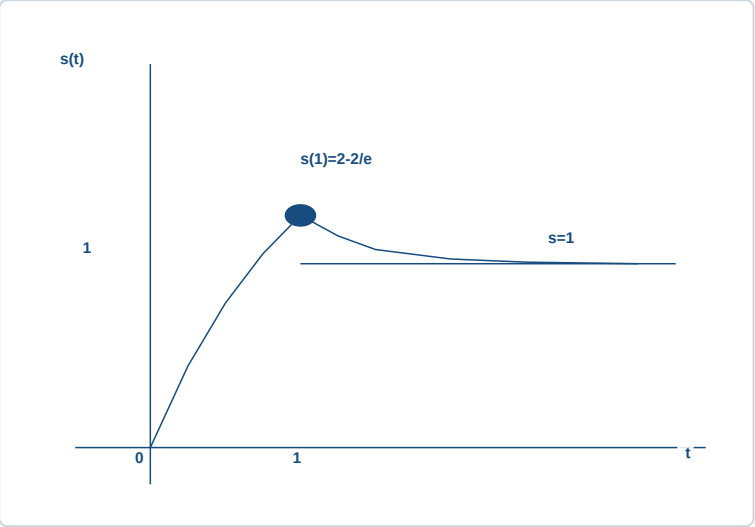
> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1,3$ au dixième.

Question 5.b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Sur $[0;1[$, la formule de la question 4 donne une courbe croissante partant de $(0;0)$. À $t = 1$, les deux expressions de $s(t)$ donnent la même valeur, $2 - 2/e$, donc la courbe se raccorde sans saut. Pour $t \geq 1$, le coefficient $e - 2$ est positif et e^{-t} décroît : la courbe descend vers l'asymptote horizontale $s = 1$.

1. Tracer la branche croissante jusqu'au point plein d'abscisse 1.
2. Depuis ce maximum, tracer la branche décroissante qui tend vers $s = 1$.

Courbe représentative de s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe part de $(0;0)$, atteint $(1;2-2/e)$, puis décroît vers l'asymptote horizontale $s=1$.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, le sujet donne $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$. Lorsque t tend vers $+\infty$, le terme exponentiel e^{-t} tend vers 0. Le facteur $e-2$ est constant, donc $(e-2)e^{-t}$ tend également vers 0. Il ne reste alors que le terme constant dans l'expression de $s(t)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2022, code 22MATGRB2, d'une durée de 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et un système électrique, mobilisant équations différentielles, analyse de fonction, intégration et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, on peut chercher une solution particulière constante, puis ajouter les solutions de l'équation homogène y' + ay = 0.
- Une limite finie de f(t) lorsque t tend vers +∞ donne une asymptote horizontale de la courbe.
- La distance parcourue entre t0 et t1 est l'intégrale de la vitesse : d = ∫ de t0 à t1 f(t)dt.
- Un retard temporel d'une unité se traduit en transformée de Laplace par un facteur e^(-p).

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités et distinguer la vitesse en m/s de la distance en mètres.
- Pour le tableau de variation, justifier le signe de la dérivée sur tout l'intervalle étudié.
- Dans un développement limité d'ordre 2, vérifier que le reste est de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec ε(t) tendant vers zéro.
- Pour les signaux en échelons, repérer précisément les instants de changement et représenter chaque intervalle.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la constante dans la solution de l'équation différentielle du chariot ?

On écrit la solution générale comme la somme d'une solution particulière et de la solution de l'équation homogène. On remplace ensuite t par 0 et f(0) par 20 pour déterminer la constante.

Q : Comment utiliser le retard dans une transformée de Laplace ?

La fonction f(t-a)U(t-a) a pour transformée F(p)e^(-ap). Ici, le terme U(t-1) introduit donc le facteur e^(-p), conformément à la propriété de retard fournie dans le formulaire.

Q : Combien de temps dure l'épreuve et quels exercices faut-il traiter ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points chacun. Les trois parties de l'exercice 1 peuvent être traitées indépendamment, ce qui permet d'organiser le travail selon les méthodes maîtrisées.

Q : Le coefficient est-il identique pour toutes les spécialités concernées ?

Non. Le sujet indique un coefficient de 1,5 pour la spécialité Conception et industrialisation en microtechniques et un coefficient de 2 pour la spécialité Électrotechnique.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscav.fr/assets/annales/bts-cav/E2 - Mathématiques/2022/BTS CAV - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Construction et Aménagement de Véhicules : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.