Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRD1** • Durée : **2 heures**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Évolution de la température de l'eau d'un spa (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle qualité du blé, masse des sacs de farine et acceptation d'une nouvelle farine (12 questions) **Page 6**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btscav.fr/assets/annales/bts-cav/E2 - Mathématiques/2023/BTS CAV - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

1. Évolution de la température de l’eau d’un spa

Après la coupure du chauffage, la température de l’eau du spa, initialement à 38 °C, est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle; la température ambiante est de 25 °C. Les questions portent sur la résolution et l’étude de cette fonction, puis sur l’interprétation d’un calcul et d’un algorithme liés au refroidissement.

Partie A

Question 1. Déterminer les solutions de l’équation différentielle y’ + 0,05y = 0 sur l’intervalle [0 ; +∞[.

L’équation homogène s’écrit **y'=-0,05y**. Ses solutions sont les fonctions exponentielles de la forme :

$$y(t) = Ce^{-0,05t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer, sur l’intervalle [0 ; +∞[, une fonction constante solution particulière de l’équation différentielle (E) : y’ + 0,05y = 1,25.

Pour une fonction constante $y(t) = k$, sa dérivée est nulle. L’équation devient $0,05k = 1,25$, donc $k = 1,25/0,05 = 25$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution particulière constante est $y(t) = 25$.

Question 3. En déduire les solutions de l’équation différentielle (E) : y’ + 0,05y = 1,25.

1. On ajoute la solution particulière 25 aux solutions de l’équation homogène.
2. On obtient toutes les solutions de (E) : $y(t) = Ce^{-0,05t} + 25$, où $C \in \mathbb{R}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,05t} + 25$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 4. Montrer que, pour tout réel t de l’intervalle [0 ; +∞[, f(t) = 13e$^{-0,05t}$ + 25.

La solution générale est $f(t) = Ce^{-0,05t} + 25$. La condition initiale donne $f(0) = C + 25 = 38$, donc $C = 13$. Ainsi, pour tout $t \geq 0$, $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$.

Partie B

Question 1. Calculer f(24), arrondie au dixième, puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

En remplaçant t par 24 : $f(24) = 13e^{-0{,}05\times 24} + 25 \approx 28{,}9$. Cette valeur est la température de l'eau du spa, en degrés Celsius, 24 heures après la coupure du chauffage.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Après 24 h, l'eau est à environ 28,9 °C.

Question 2. a). Déterminer une expression de f'(t) pour tout réel t de l'intervalle [0 ; +∞[.

La dérivée de $e^{-0{,}05t}$ est $-0{,}05e^{-0{,}05t}$. Par conséquent, en dérivant $f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25$, on obtient :

$$f'(t) = -0{,}65e^{-0{,}05t}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -0{,}65e^{-0{,}05t}$.

Question 2. b). Déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et expliquer si ce sens de variation paraît cohérent avec le contexte.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0{,}05t} > 0$, donc $f'(t) < 0$. La fonction f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. C'est cohérent avec le contexte : une fois le chauffage coupé, l'eau refroidit.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est strictement décroissante : l'eau du spa refroidit après la coupure.

Question 3. a). Déterminer la limite de f en +∞.

Comme $e^{-0{,}05t}$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, la partie exponentielle de $f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25$ disparaît à la limite. Ainsi :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 25.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 25$.

Question 3. b). Interpréter la valeur de cette limite dans le contexte de l'exercice.

À long terme, la température de l'eau se rapproche de 25 °C, qui est la température ambiante constante. La limite décrit cette stabilisation, sans signifier que l'eau atteint exactement 25 °C en un temps fini.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La température de l'eau se rapproche de la température ambiante, soit 25 °C.

Question 4. a). L'alarme sonore se déclenche lorsque la température devient strictement inférieure à la température programmée. Si l'utilisateur programme 36 °C, déterminer par le calcul le temps écoulé après la coupure avant le déclenchement de l'alarme. Donner la durée exacte puis sa valeur arrondie à la minute.

Au seuil de 36 °C, $13e^{-0{,}05t} + 25 = 36$, donc $e^{-0{,}05t} = 11/13$, puis $t = 20\ln(13/11)$ heures. Le déclenchement a lieu lorsque la température devient strictement inférieure à 36 °C, c'est-à-dire juste après ce franchissement.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Durée seuil : $20\ln(13/11)$ h, soit 200 min à la minute près (3 h 20 min).

Question 4. b). Déterminer la valeur numérique affichée par l'algorithme qui augmente H d'une heure et actualise la température T tant que T ≥ 34.

À $H = 7$, l'algorithme calcule $T = 13e^{-0{,}05\times 7} + 25 \approx 34,16$, donc la boucle continue. À $H = 8$, il obtient $T = 13e^{-0{,}05\times 8} + 25 \approx 33,71 < 34$: la boucle s'arrête et affiche $H = 8$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'algorithme affiche 8.

Question 4. c). Expliquer ce que l'algorithme permet de déterminer dans le contexte de l'exercice.

L'algorithme augmente H d'une heure et actualise la température jusqu'à ce que celle-ci devienne inférieure à 34 °C. Il détermine donc le premier nombre entier d'heures après la coupure auquel la température passe sous ce seuil.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La température passe sous 34 °C au bout de 8 heures entières.

2. Contrôle qualité du blé, masse des sacs de farine et acceptation d'une nouvelle farine

Une minoterie contrôle l'extensibilité d'échantillons de pâte et le taux d'humidité de livraisons de blé, puis étudie la masse de ses sacs de farine. L'exercice examine aussi, à l'aide de probabilités, quels clients acceptent de tester la farine La Romaine et combien pourraient l'avoir testée dans un échantillon de 200 clients.

Partie A

Question 1. a). À partir des indices d'extensibilité mesurés sur les cinq échantillons de pâte, donner la moyenne de la série et son écart-type arrondi au centième.

Les cinq mesures sont 104, 81, 83, 57 et 55 mm. Leur moyenne est $\bar{x} = (104 + 81 + 83 + 57 + 55)/5 = 76$ mm. La somme des carrés des écarts à cette moyenne vaut $28^2 + 5^2 + 7^2 + 19^2 + 21^2 = 1660$. L'écart-type de la série est donc $\sigma = \sqrt{1660/5} \approx 18,22$ mm.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne : 76 mm ; écart-type : 18,22 mm.

Question 1. b). En considérant que l'écart-type de la série est σ = 18 mm, vérifier qu'aucune des cinq valeurs n'est en dehors de l'intervalle [x̄ − 2σ ; x̄ + 2σ] et conclure si le technicien doit procéder à un test sur cinq nouveaux échantillons.

Avec $\bar{x} = 76$ mm et $\sigma = 18$ mm, l'intervalle de contrôle est $[76 - 2 \times 18\ ;\ 76 + 2 \times 18] = [40\ ;\ 112]$ mm. Les cinq mesures, comprises entre 55 et 104 mm, appartiennent à cet intervalle. Aucune valeur ne déclenche donc le contrôle complémentaire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les cinq valeurs sont dans [40 ; 112] mm : aucun nouveau test n'est nécessaire.

Question 2. À partir des masses et des taux d'humidité des deux livraisons, montrer que le technicien peut autoriser le déchargement des deux camions dans un même silo vide, sachant que le taux d'humidité exigé est inférieur à 13 %.

Le taux d'humidité du mélange est la moyenne pondérée par les masses : $\dfrac{29540 \times 12,4 + 14540 \times 14,1}{29540 + 14540} \approx 12,961$ %. Ce taux est inférieur au seuil de 13 % exigé par le cahier des charges. Le technicien peut donc autoriser le déchargement des deux camions dans le même silo vide.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Humidité du mélange : environ 12,961 % ; déchargement autorisé.

Partie B

Question 1. La masse X d'un sac suit une loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'un sac choisi au hasard ait une masse inférieure à 25 kg.

On centre et réduit la variable : $Z = (X - 25,2)/0,1$ suit la loi normale centrée réduite. Pour $X = 25$, on obtient $Z = -2$. Ainsi, $P(X < 25) = P(Z < -2) \approx 0,0228$, soit 0,023 à 10^{-3} près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X < 25) \approx 0,023$.

Question 2. a). Donner un réel h tel que P(25,2 − h ≤ X ≤ 25,2 + h) soit approximativement égal à 0,95, à 10^{-2} près.

Pour une loi normale, environ 95 % des valeurs se situent à moins de $1,96$ écart-type de la moyenne. Ici, $h \approx 1,96 \times 0,1 = 0,196$ kg, soit 0,20 kg au centième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h \approx 0,20$ kg.

Question 2. b). À partir de la représentation graphique fournie, expliquer pourquoi cette courbe ne peut pas être celle de la fonction de densité de probabilité de X.

Pour cette loi normale, environ 95 % des masses doivent se situer entre $25,2 - 1,96 \times 0,1$ et $25,2 + 1,96 \times 0,1$, soit environ 25,00 kg et 25,40 kg. Or la courbe du sujet est très étalée autour de 25,2 kg. La densité correspondant à un écart-type de seulement 0,1 kg devrait être bien plus resserrée.

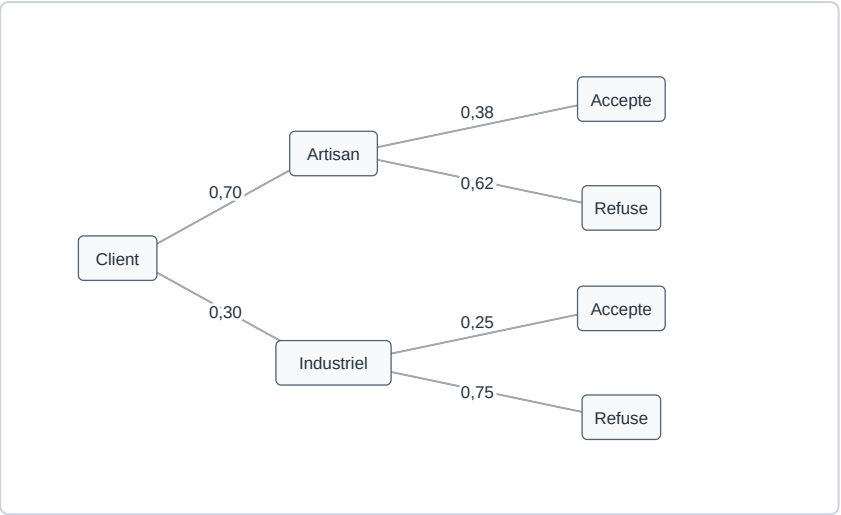
> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe est trop étalée pour représenter la densité de X.

Partie C

Question 1. Représenter la situation concernant le type de client et son acceptation de tester la farine La Romaine par un arbre pondéré.

On note A l'événement « le client est artisan boulanger » et T l'événement « il accepte de tester la farine ». Les probabilités de premier niveau sont $P(A) = 0,70$ et $P(\overline{A}) = 0,30$. Les probabilités conditionnelles d'acceptation sont respectivement 0,38 et 0,25 ; celles de refus sont leurs complémentaires.

Type de client et test de La Romaine



Les probabilités des branches issues d'un même nœud somment à 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré : artisan 0,70, industriel 0,30 ; acceptation 0,38 et 0,25, refus 0,62 et 0,75.

Question 2. a). Calculer la probabilité que le client soit un artisan boulanger et accepte de tester la farine La Romaine.

La probabilité qu'un client soit artisan et accepte de tester la farine est le produit de la probabilité d'être artisan par la probabilité conditionnelle d'accepter : $P(A \cap T) = P(A) \times P_A(T) = 0,70 \times 0,38 = 0,266$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A \cap T) = 0,266$.

Question 2. b). Montrer que la probabilité qu'un client accepte de tester la farine La Romaine est égale à 0,341.

L'acceptation peut se produire dans deux cas incompatibles : artisan et acceptation, ou industriel et acceptation. Ainsi, $P(T) = 0,70 \times 0,38 + 0,30 \times 0,25 = 0,341$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0,341$.

Question 3. **Sachant qu'un client a testé la farine La Romaine, calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que ce soit un artisan boulanger.**

Par définition de la probabilité conditionnelle, $P(A \mid T) = \dfrac{P(A \cap T)}{P(T)}$. Les résultats précédents donnent $P(A \cap T) = 0,266$ et $P(T) = 0,341$. Ainsi, $P(A \mid T) = 0,266 / 0,341 \approx 0,780$ à 10^{-3} près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A \mid T) \approx 0,780$, soit environ 78,0 %.

Question 4. a). **La variable Y suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au plus 60 des 200 clients choisis aient testé la farine La Romaine.**

Comme Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,341$, l'événement « au plus 60 clients » est $Y \leq 60$. On calcule $P(Y \leq 60) = \sum_{k=0}^{60} \binom{200}{k} (0,341)^k (0,659)^{200-k}$, ce qui donne environ 0,125.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 60) \approx 0,125$.

Question 4. b). **Calculer l'espérance de Y et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.**

Pour une loi binomiale, $E(Y) = np$. Donc $E(Y) = 200 \times 0,341 = 68,2$. Cette valeur représente le nombre moyen de clients ayant testé la farine parmi des échantillons de 200 clients.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(Y) = 68,2$ clients.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, code 23MATGRD1, d'une durée de 2 heures. Les deux exercices étudient le refroidissement de l'eau d'un spa et les contrôles et ventes d'une minoterie. Les compétences évaluées comprennent équations différentielles, fonctions exponentielles, statistiques, lois normale et binomiale, probabilités conditionnelles, interprétation de résultats et lecture d'un algorithme.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.
- Un taux d'humidité de mélange se calcule en pondérant les taux par les masses correspondantes, puis en divisant par la masse totale.
- Pour une loi normale centrée en μ, un intervalle symétrique autour de μ s'écrit [μ − h ; μ + h].
- Pour Y suivant une loi binomiale B(n,p), l'espérance vaut E(Y) = np; une probabilité conditionnelle s'écrit P(A ∩ T) / P(T).

Points de vigilance & attentes du jury

- Accompagner les résultats numériques d'unités et d'une interprétation adaptée au contexte.
- Pour le mélange des camions, pondérer chaque taux d'humidité par la masse correspondante avant de comparer le résultat à 13 %.
- Dans l'arbre, distinguer la probabilité d'une intersection de celle d'une probabilité conditionnelle.
- Respecter les arrondis demandés et, pour l'algorithme, tenir compte de la condition T ≥ 34.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle de température ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, puis cherchez une solution particulière constante pour le second membre. Additionnez ces solutions et utilisez la condition initiale f(0) = 38 pour déterminer la constante.

Q : Comment calculer le taux d'humidité du mélange des deux livraisons ?

Multipliez la masse de chaque livraison par son taux d'humidité pour obtenir la masse d'eau correspondante. Additionnez ces masses d'eau, puis divisez par la masse totale de blé et comparez le taux obtenu au seuil de 13 %.

Q : Comment organiser le temps et les arrondis dans cet examen ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points. Repérez les parties indépendantes, gardez les valeurs non arrondies pendant les calculs intermédiaires et appliquez l'arrondi indiqué dans chaque question.

Q : Comment traiter la probabilité conditionnelle et la loi binomiale de l'exercice ?

Pour la probabilité qu'un client soit artisan sachant qu'il a testé la farine, divisez P(A ∩ T) par P(T). Pour l'échantillon, utilisez Y suivant B(200 ; 0,341), puis E(Y) = np pour interpréter le nombre moyen de clients concernés.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscav.fr/assets/annales/bts-cav/E2 - Mathématiques/2023/BTS CAV - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Construction et Aménagement de Véhicules : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.